- **La duración del examen será de 1h y 30 minutos.**
- **Las notas se publicarán el 29 de enero y la revisión será el 30 de enero.**

Problema 1 (5 Puntos)

Sea la función $f(x) = x^2 + e^x - 2$. Se quiere calcular un valor aproximado de una raíz $s \in [0.5, 1]$ utilizando el método de Newton, a partir de un punto inicial x_0. Se pide:

a. Comprobar que la función anterior tiene al menos una raíz s en el intervalo $[0.5, 1]$.

b. Sea $x_0 \in [0.5, 1]$ un punto de arranque, comprobar que el método de Newton es convergente. Dar la expresión del método iterativo aplicado al cálculo de la raíz s.

c. Sean $x_0 = 0.5$ y $e_n = |x_n - s|$ el error en la iteración n-ésima.

- Calcular las dos primeras iteraciones del método de Newton, x_1 y x_2 (con 8 cifras decimales).
- Con la aproximación $e_n \cong |x_{n+1} - x_n|$ calcular las estimaciones del error e_0 y e_1.
- Con la aproximación $e_{n+1} \cong Ce_n^2$ calcular una estimación del valor C.
- Sin realizar ninguna iteración más y utilizando la estimación del punto anterior calcular una estimación de los errores e_2, e_3 y e_4.
- A partir de los resultados obtenidos en el punto anterior, ¿cuántas iteraciones serán suficientes para aproximar la raíz s con 15 cifras de precisión?. Justificar.

Debéis copiar la tabla en la hoja de respuestas y completarla. También debéis entregar el desarrollo y los cálculos del problema.

Expresión	Valor
$f(0.5) \times f(1)$	
Cota de $e_0 = \|x_0 - s\|$, con $x_0 \in [0.5, 1]$	
Cota de $M = \dfrac{\max_{x\in[0.5,1]} \|f''(x)\|}{2 \min_{x\in[0.5,1]} \|f'(x)\|}$	
Cota de Me_0	
Expresión del método iterativo de Newton	
Valor de x_1	
Valor de x_2	
Estimación de $e_0 = \|x_1 - x_0\|$	
Estimación de $e_1 = \|x_2 - x_1\|$	
Estimación de C	
Estimación de e_2	
Estimación de e_3	
Estimación de e_4	
¿Número de iteraciones para obtener 15 cifras?	

Nota: Los valores de la función exponencial en 0.5 y 1 son: exp(0.5)= 1.6487212707, exp(1)= 2.7182818284.

Problema 2 **(5 Puntos)**

Sean:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 6 & 8 & 4+2\times10^{-4} \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2+2\times10^{-4} \end{pmatrix}$$

Resolver los sistemas lineales $Ax=b$ y $A\tilde{x}=\tilde{b}$ mediante el método de Gauss con pivotaje parcial. A partir únicamente de los resultados anteriores, dar una estimación del número de condición de la matriz A en la norma 1, $cond_1(A)$.

Problema 1: Solución

Se quiere calcular las raíces en el intervalo $[0.5, 1]$ de la función continua $f(x)=x^2+e^x-2$, cuyas derivadas son $f'(x)=2x+e^x$ y $f''(x)=2+e^x$ funciones crecientes en el intervalo $[0.5, 1]$.

a) $f(0.5)=0.5^2+e^{0.5}-2=\text{-}0.1012<0$, $f(1)=1^2+e^1-2=1.7182>0\,1.7182$.

Luego f continua y $f(0.5)f(1)=\text{-}0.174<0$, por tanto f tiene una raíz $s\in[0.5, 1]$.

b) Como $x_0\in[0.5, 1]$, $s\in[0.5, 1]$ tenemos que $e_0=|x_0-s|\leq 0.5$

$$M=\frac{\max\limits_{x\in[0.5,1]}|f''(x)|}{2\min\limits_{x\in[0.5,1]}|f'(x)|}=\frac{\max\limits_{x\in[0.5,1]}|2+e^x|}{2\min\limits_{x\in[0.5,1]}|2x+e^x|}=\frac{2+e^1}{2(2\times 0.5+e^{0.5})}\approx 0.89067$$

$Me_0\leq 0.89067/2=0.445335<1/2<1$. Por tanto, el método de Newton es convergente. La expresión del método es la siguiente:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^{\,2}+e^{x_n}-2}{2x_n+e^{x_n}}$$

c) Sea $x_0=0.5$, entonces

$$x_1=x_0-\frac{x_0^{\,2}+e^{x_0}-2}{2x_0+e^{x_0}}=0.5-\frac{0.5^2+e^{0.5}-2}{2\times 0.5+e^{0.5}}\simeq 0.5382368391$$

$$x_2=x_1-\frac{x_1^{\,2}+e^{x_1}-2}{2x_1+e^{x_1}}\simeq 0.5372750655$$

Con la aproximación $e_n\cong|x_{n+1}-x_n|$ tenemos

$e_0\cong|x_1-x_0|\cong|0.5382368391-0.5|\cong 0.038236839194$ y

$e_1\cong|x_2-x_1|\cong|0.5372750655-0.53823683919|\cong 9.61773693\text{e-}04$

Con la aproximación $e_{n+1}\cong Ce_n^2$ tenemos $e_1\cong Ce_0^2$, $C\cong e_1/e_0^2\simeq 0.65782280$ y

$e_2\cong Ce_1^2\simeq 0.65782280\times(9.61773693\text{e-}04)^2\simeq 6.08491776\text{e-}07$

$e_3\cong Ce_2^2\simeq 0.65782280\times(6.08491776\text{e-}07)^2\simeq 2.43566946\text{e-}13$

$e_4\cong Ce_3^2\simeq 0.65782280\times(2.43566946\text{e-}13)^2\simeq 3.90252441\text{e-}26$

El número de iteraciones necesarias para aproximar la raíz con 15 cifras de precisión son 4 iteraciones, ya que $e_4\cong|x_5-x_4|<10^{-15}$.

Expresión	Valor
$f(0.5)\times f(1)$	-0.174
Cota de $e_0=\lvert x_0-s\rvert$, con $x_0\in[0.5, 1]$	0.5
Cota de $M=\frac{\max_{x\in[0.5,1]}\lvert f''(x)\rvert}{2\min_{x\in[0.5,1]}\lvert f'(x)\rvert}$	0.89067
Cota de Me_0	$0.445335<1/2<1$
Expresión del método iterativo de Newton	$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^{\,2}+e^{x_n}-2}{2x_n+e^{x_n}}$
Valor de x_1	0.5382368391
Valor de x_2	0.5372750655

Estimación de $e_0 = \lvert x_1 - x_0 \rvert$	0.038236839194
Estimación de $e_1 = \lvert x_2 - x_1 \rvert$	9.61773693e-04
Estimación de C	0.65782280
Estimación de e_2	6.08491776e-07
Estimación de e_3	2.43566946e-13
Estimación de e_4	3.90252441e-26
¿Número de iteraciones para obtener 15 cifras?	4

Problema 2 . Solución

Solución.

A partir de la matriz y de los términos independientes, se tiene la matriz ampliada:

3.0000	2.0000	1.0000	2.0000	2.0000
-3.0000	-4.0000	-2.0000	-1.0000	-1.0000
6.0000	8.0000	4.0002	2.0000	2.0002

El primer pivote se encuentra en la tercera fila, luego se intercambia la tercera fila con la primera:

6.0000	8.0000	4.0002	2.0000	2.0002
-3.0000	-4.0000	-2.0000	-1.0000	-1.0000
3.0000	2.0000	1.0000	2.0000	2.0000

Usamos 2ª fila - (-3/6) 1ª fila y 3ª fila - (3/6) 1ª fila, quedando

6.0000	8.0000	4.0002	2.0000	2.0002
0	0	0.0001	0	0.0001
0	-2.0000	-1.0001	1.0000	0.9999

y ahora se intercambian la segunda y tercera filas.

6.0000	8.0000	4.0002	2.0000	2.0002
0	-2.0000	-1.0001	1.0000	0.9999
0	0	0.0001	0	0.0001

Se resuelven ambos sistemas triangulares:

$$0{,}0001(x_3, \widetilde{x_3}) = (0, 0{,}0001) \qquad (x_3, \widetilde{x_3}) = (0, 1)$$

$$-2(x_2, \widetilde{x_2}) - 1{,}0001(x_3, \widetilde{x_3}) = (1, 0{,}9999) \qquad (x_2, \widetilde{x_2}) = (-1/2, -1)$$

$$6(x_1, \widetilde{x_1}) + 8(x_2, \widetilde{x_2}) + 4{,}0002(x_3, \widetilde{x_3}) = (2, 2{,}0002) \qquad (x_1, \widetilde{x_1}) = (1, 1)$$

luego

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \widetilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para estimar el condicionameinto en la norma 1 , usamos $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ con lo que

$||b||_1 = 5 \qquad ||b - \widetilde{b}||_1 = 2 \times 10^{-4} \qquad ||x||_1 = 3/2 \qquad ||x - \widetilde{x}||_1 = 3/2$

y la propiedad

$$\frac{||x - \widetilde{x}||}{||x||} \leq cond_1(A) \frac{||b - \widetilde{b}||}{||b||}$$

quedando $cond_1(A) \geq 25000$